

I. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của các hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm của các hàm số hợp ($u = u(x)$)
$\int dx = x + c$	$\int du = u + c$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \ (x \neq 0)$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + c \ (u \neq 0)$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^u du = e^u + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \ (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \ (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos u du = \sin u + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin u du = -\cos u + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + c$

Nhắc lại vi phân của hàm số: Vi phân của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $d(f(x))$ được xác định:

$$d(f(x)) = f'(x)dx$$

Áp dụng vi phân của hàm số ta có ta có $\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln|u(x)| + c$

Một số kết quả quen thuộc:

1) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

2) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$

3) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c$

4) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

II. Công thức Niuton – Laipnit: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

III. Các tính chất của tích phân

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

6) $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

$$7) f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$8) m \leq f(x) \leq M; \forall x \in [a; b] \Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

I. Tính tích phân bằng phương pháp biến đổi trực tiếp

* **Tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ dạng cơ bản**

Phương pháp: Phân tích $f(x)$ thành tổng các hàm số có dạng cơ bản

+ Biến đổi về dạng $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_a^b f(u(x))du(x)$ (Cơ sở của phép đổi biến).

+ Sử dụng công thức $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{1}{(a-b)} \int \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{(a-b)} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + c$

Chú ý: $\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln |u(x)| \Big|_a^b = \ln |u(b)| - \ln |u(a)|$.

Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$$1) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad 2) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$3) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \quad 4) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

$$5) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}. \quad 6) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

2. Công thức nhân

2.1. Công thức nhân đôi

$$1) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a. \quad 2) \sin 2a = 2 \sin a \cos a. \quad 3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

2.1.1. Công thức hạ bậc

$$1) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}. \quad 2) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

2.1.2. Công thức tính theo $\cos 2a$

$$1) \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a). \quad 2) \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a). \quad 3) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

2.1.3. Công thức tính theo $\tan \frac{a}{2} = t$

$$1) \cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \quad 2) \sin a = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad 3) \tan a = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

2.2. Công thức nhân ba

$$1) \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a. \quad 2) \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a. \quad 3) \tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}.$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$1) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]. \quad 2) \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$3) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$1) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad 2) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$3) \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad 4) \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

Một số công thức quen thuộc

$$1) \cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \quad 2) \cos a + \sin a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$3) \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \quad 4) \cos a - \sin a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$5) \cos^4 a + \sin^4 a = 1 - 2 \sin^2 a \cos^2 a \quad 6) \cos^6 a + \sin^6 a = 1 - 3 \sin^2 a \cos^2 a.$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 2}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan^2 x}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx = (\tan x + 2 \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 3 - \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 3x + 3 \cos x) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + 3 \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{11}{6} \right).$$

Cách khác:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{11}{6} \right).$$

Ví dụ 3. Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 4. Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-5x+6} dx = \int_0^1 \frac{2x-5+4}{x^2-5x+6} dx = \int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx + \int_0^1 \frac{4}{x^2-5x+6} dx = \int_0^1 \frac{d(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6} +$$

$$4 \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln|x^2-5x+6| \Big|_0^1 + 4 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| \Big|_0^1 = 8 \ln 2 - 5 \ln 3.$$

Chú ý: Có thể biến đổi như sau:

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-5x+6} dx = \int_0^1 \frac{2(x-2)+3}{(x-2)(x-3)} dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right] dx =$$

$$\left(5 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| \right) \Big|_0^1 = 8 \ln 2 - 5 \ln 3.$$

Ví dụ 5. Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^3} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx = \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Ví dụ 6. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \ln|\cos x + \sin x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Ví dụ 7. Tính tích phân

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \ln \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Cách khác: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} =$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1} \right) d(\sin x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln(2 - \sqrt{3}) = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Ví dụ 8. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} =$

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1} \right) d(\cos x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

Ví dụ 9. Tính tích phân

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} = \frac{1}{2} \int_1^2 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_1^2 = \frac{3\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{2}}{3}.$$

Ví dụ 10. Tính tích phân

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x + \sin^4 x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2 x \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) \right) dx \\ &= \left(\frac{3}{4} x + \frac{1}{16} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Ví dụ 11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1) d(\tan x) = \left(\frac{\tan^3 x}{3} + \tan x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}.$

Ví dụ 12. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x + \sin x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(x + \sin x)}{x + \sin x} = \frac{1}{2} \ln(x + \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\pi}{2} + 1}{\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}}.$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Tính các tích phân

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\int_0^1 (2^x \cdot 3^{2x} - \sqrt[3]{x^2}) dx.$ ĐS: $\frac{17}{\ln 18} - \frac{3}{5}.$ | 2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 - \cos^3 x}{\cos^2 x} dx.$ ĐS: $\frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}.$ | |
| 3) $\int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{x^3} dx.$ ĐS: $\ln 2 - 1.$ | 4) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x+1}.$ ĐS: $\frac{5}{6} - \ln 2.$ | |
| 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 x + \sin^6 x) dx.$ | 6) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x dx.$ ĐS: $0.$ | |
| 7) $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx.$ ĐS: $(\frac{3\pi}{8}).$ | 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx.$ ĐS: $2.$ | |
| 9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx.$ ĐS: $(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}).$ | 10) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}.$ ĐS: $4.$ | |
| 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx.$ ĐS: $\frac{8}{15}.$ | 12) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}}.$ ĐS: $\frac{(7 - 3\sqrt{3})}{3}.$ | |
| 13) $\int_{-4}^3 x^2 - 4 dx.$ ĐS: $\frac{71}{3}.$ | 14) $\int_{-1}^1 x^3 + x dx.$ ĐS: $\frac{3}{2}.$ | |
| 15) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2}.$ ĐS: $-\frac{2}{3} \ln 2.$ | 16) $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 2}.$ ĐS: $\frac{1}{3} \ln 2.$ | 17) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{4 - x^2}.$ ĐS: $-1 + \ln 3.$ |

II. Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Công thức tích phân từng phần: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{1}{x} \ln(1+x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2 +$$

$$+ \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx = -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2 + (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^2 = -\frac{3}{2} \ln 3 + 3 \ln 2.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases} \Rightarrow I = -x \cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx = \frac{\pi}{4} + \ln |\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Ví dụ 3. $I = \int_1^e x \ln^2 x dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{x} \ln x dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} e^2 - I_1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Vậy, $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Ví dụ 4. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-1}{2 \sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{-x}{2 \sin^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = \frac{\pi - 6\sqrt{3} + 18}{36}.$$

Ví dụ 5. (Khối B.2011) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+x \sin x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \sqrt{3} + I_1$. Tính I_1

đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1} = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$
 $= \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$. Vậy, $I = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$.

Ví dụ 6. $I = \int_0^1 \frac{x(e^x + 1)}{(x + 1)^2} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x(e^x + 1) \\ dv = \frac{dx}{(x + 1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (e^x(x + 1) + 1)dx \\ v = \frac{-1}{x + 1} \end{cases}$

$I = -\frac{x(e^x + 1)}{x + 1} \Big|_0^1 + \int_0^1 (e^x + \frac{1}{x + 1}) dx = -\frac{e + 1}{2} + (e^x + \ln|x + 1|) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} + \ln 2 - \frac{3}{2}$.

Vậy, $I = \frac{e}{2} + \ln 2 - \frac{3}{2}$.

Ví dụ 7. $\int_1^2 \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{xdx}{(1 + x^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} = -\frac{1}{2(1 + x^2)} \end{cases}$

$I = \frac{-\ln x}{2(1 + x^2)} \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + x^2)} = \frac{-\ln 2}{10} + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{d(1 + x^2)}{x^2(1 + x^2)} = \frac{-\ln 2}{10} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2}{x^2 + 1} \right| \Big|_1^2 = \frac{-\ln 2}{10} + \frac{1}{4} \ln \frac{8}{5}$.

Ví dụ 8. $\int_0^3 \ln \sqrt{x + 1} dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln \sqrt{x + 1} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{2(x + 1)} dx \\ v = x \end{cases}$

$I = x \ln \sqrt{x + 1} \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x}{x + 1} dx = 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{x + 1} \right) dx = 3 \ln 2 - \frac{1}{2} (x - \ln|x + 1|) \Big|_0^3$
 $= 3 \ln 2 - \frac{1}{2} (3 - \ln 4) = 4 \ln 2 - \frac{3}{2}$.

BÀI TẬP

I. Tính các tích phân

1) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$. ĐS: -2π .

2) $\int_0^1 (x^2 + 2x)e^x dx$. ĐS: e .

3) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$. ĐS: $2 - \frac{5}{e}$.

4) $\int_0^1 x e^{3x} dx$. ĐS: $\frac{2e^3 + 1}{9}$.

5) $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$. ĐS: $\frac{e^{\pi} + 1}{2}$.

6) $\int_1^2 (2x + 1) \ln x dx$. ĐS: $6 \ln 2 - \frac{5}{2}$.

7) $\int_e^{\frac{1}{e}} \ln^2 x dx$. ĐS: $\frac{5}{e} - e$.

8) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$. ĐS: 0.

9) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$. ĐS: $-\frac{1}{8} \ln 2 + \frac{3}{16}$.

10) $\int_0^2 \ln(\sqrt{1+x^2} - x) dx$. ĐS: $2 \ln(\sqrt{5} - 2) + \sqrt{5} - 1$. 12)

11) $\int_0^3 x \ln \sqrt{x+1} dx$. ĐS: $4 \ln 2 - \frac{3}{8}$.

12) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$. ĐS: $1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$.

13) $\int_0^1 \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$. ĐS: $\frac{e}{2} - 1$.

14) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$. ĐS: $\frac{1}{6} - \frac{3}{8} \ln 3 + \frac{4}{9} \ln 2$.

15) KA.2012 $\int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$. ĐS: $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \ln 2 + \ln 3$.

III. Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số

Biến đổi tích phân $\int_a^b f(x) dx$ về dạng $\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_a^b f(u(x)) du(x)$, dùng phép đặt $u(x) = t$.

Chú ý một số phép đổi biến:

+ Nếu $f(x)$ chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ có thể đặt $x = a \sin t$.

+ Nếu $f(x)$ chứa $\sqrt{a^2 + x^2}$ hoặc $\frac{1}{x^2 + a^2}$ có thể đặt $x = a \tan t$.

+ Một số trường hợp biểu thức dưới dấu tích phân có chứa $\sqrt[n]{g(x)}$ thì có thể đặt $\sqrt[n]{g(x)} = t$.

+ Một số trường hợp có thể đặt $\sin x = t; \cos x = t; \tan x = t; \cot x = t; \sin x + \cos x = t; \dots$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. (Khối B.2012) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow \frac{dt}{2} = x dx$;

$x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{2}{t+2} \right) dt = \frac{1}{2} (2 \ln 3 - 3 \ln 2).$$

Ví dụ 2. (Khối D.2011) $\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$. Đặt

$t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dx = t dt, x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 4 \Rightarrow t = 3$.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx &= \int_1^3 \frac{2t^3-3t}{t+2} dt = \int_1^3 \left(2t^2 - 4t + 5 - \frac{10}{t+2} \right) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + 5t - 10 \ln|t+2| \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{34}{3} + 10 \ln \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. (Khối A.2005) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(2 \cos x + 1)}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$.

Đặt $t = \sqrt{1 + 3 \cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3 \cos x \Rightarrow 2t dt = -3 \sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -\frac{2}{3} t dt$.

$x = 0 \Rightarrow t = 2; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Ta có

$$I = -\frac{2}{3} \int_2^1 \frac{\left(2 \cdot \frac{t^2 - 1}{3} + 1\right) t dt}{t} = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{2t^3}{3} + t \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{16}{3} + 2 - \frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{34}{27}.$$

Ví dụ 4. $\int_1^e \frac{\ln x - 2}{x \ln x + x} dx = \int_1^e \frac{\ln x - 2}{x(\ln x + 1)} dx$. Đặt

$t = \ln x + 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx; x = 1 \Rightarrow t = 1; x = e \Rightarrow t = 2$. $I = \int_1^2 \frac{t - 3}{t} dt = \left(t - 3 \ln |t| \right) \Big|_1^2 = 1 - 3 \ln 2$.

Ví dụ 5. $\int_1^e \frac{\sqrt{x \ln x + 2} (1 + \ln x)}{x \ln x - 2} dx$. Đặt $t = \sqrt{x \ln x + 2} \Rightarrow t^2 = x \ln x + 2 \Rightarrow t^2 = (1 + \ln x) dx$.

$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = e \Rightarrow t = \sqrt{e + 2}$.

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{x \ln x + 2} (1 + \ln x)}{x \ln x - 2} dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+2}} \frac{2t^2 dt}{t^2 - 4} = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+2}} \left(\frac{t^2 - 4 + 4}{t^2 - 4} \right) dt = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+2}} dt + 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+2}} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt$$

$$= 2(\sqrt{e+2} - \sqrt{2}) + 2 \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+2}} = 2(\sqrt{e+2} - \sqrt{2}) + 2 \left(\ln \frac{\sqrt{e+2} - 2}{\sqrt{e+2} + 2} - \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right).$$

Ví dụ 6. (Khối A.2010) $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx$.

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{e^x}{1 + 2e^x} \right) dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx.$$

Đặt $t = 1 + 2e^x \Rightarrow dt = 2e^x dx; x = 0 \Rightarrow t = 3; x = 1 \Rightarrow t = 1 + 2e$.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} dx = \frac{1}{2} \int_3^{1+2e} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |x| \Big|_3^{1+2e} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2e}{3}. \text{ Vậy, } I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2e}{3}.$$

Ví dụ 7. $I = \int_1^e \frac{x^2 \ln x + x \ln^2 x + x + 1}{x^2 + x \ln x} dx$

$$I = \int_1^e \ln x dx + \int_1^e \frac{1 + \frac{1}{x}}{x + \ln x} dx = x(\ln x - 1) \Big|_1^e + \int_1^e \frac{d(x + \ln x)}{x + \ln x}$$

$$= \left[x(\ln x - 1) + \ln |x + \ln x| \right] \Big|_1^e = \ln [e(e + 1)].$$

Ví dụ 8. (Khối A.2003) $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow xdx = tdt; x = \sqrt{5} \Rightarrow t = 3; x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = 4$.

$$I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int_3^4 \frac{tdt}{(t^2-4)t} = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$$

Ví dụ 9. $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{dx}{(10e^{-x}-1)\sqrt{e^x-1}}$. Ta có $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{dx}{(10e^{-x}-1)\sqrt{e^x-1}} = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{(10-e^x)\sqrt{e^x-1}}$.

Đặt $t = \sqrt{e^x-1} \Rightarrow t^2 = e^x-1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx; x = \ln 2 \Rightarrow t = 1; x = \ln 5 \Rightarrow t = 2$.

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{(10-e^x)\sqrt{e^x-1}} = \int_1^2 \frac{2tdt}{(9-t^2)t} = \frac{1}{3} \int_1^2 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right|_1^2 = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 10. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{1+\sin^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x(1+\sin^4 x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{\sin^4 x(1+\sin^4 x)} dx$.

Đặt $t = \sin^4 x$, ta có $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{4}, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$ và $dt = 4 \sin^3 x \cos x dx$.

Khi đó $I = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t}{t+1} \right|_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{2}$.

Ví dụ 11. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$. Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt; x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos t dt}{4 \sin^2 t \sqrt{4-4 \sin^2 t}} = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4} \cot t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ví dụ 12. $\int_0^1 x^2 \sqrt{4-3x^2} dx$. Đặt $\sqrt{3}x = 2 \sin t \Rightarrow \sqrt{3}dx = 2 \cos t dt \Rightarrow dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{4-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4}{3} \sin^2 t \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t dt = \frac{16}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 4t) dt \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right). \end{aligned}$$

Ví dụ 13. (Dự bị khối B.2010) $\int_1^2 \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{3x^4} dx$.

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 - 2 \cos t)}{3 \cdot 16 \sin^4 t} \cdot 2 \cos t dt = \frac{1}{12} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos t}{\sin^4 t} - \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} \right) dt = \frac{1}{12} \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin t)}{\sin^4 t} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 t d(\cot t) \right]$$

$$\frac{1}{12} \left[-\frac{1}{3 \sin^3 t} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \cot^3 t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{12} \left[\frac{7}{3} - \sqrt{3} \right].$$

Ví dụ 14. $I = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 9)^3}}$. Đặt $x = 3 \tan t \Rightarrow dx = \frac{3}{\cos^2 t} dt; x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$I = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 9)^3}} = 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{(9 \tan^2 t + 9)^3}} = \frac{1}{9} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{18}.$$

Ví dụ 15. (Dự bị khối D.2010) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx; x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} = \int_1^0 \frac{-dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (\tan^2 x + 1) dx; t = 0 \Rightarrow x = 0; t = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^2 x + 1) dx}{1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1} \right) d(\sin x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^0 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Ví dụ 16. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}$. Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow dt = dx, x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3}$.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin \left(t - \frac{\pi}{3} \right)}{\sin^3 t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t \cos \frac{\pi}{3} - \cos t \sin \frac{\pi}{3}}{\sin^3 t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{\sin^3 t} dt - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^3 t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 t} dt - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{2} \cot t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \cot t d(\cot t) \\
 &= -\frac{1}{2} \cot t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cot^2 t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 17. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{(1 - \sin^2 x) \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx.$

Đặt $t = \sqrt{1 + \sin^2 x} \Rightarrow t dt = \sin x \cos x dx; x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

$$I = -\int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \frac{dt}{t^2 - 2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}} \right) dt = -\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| \Big|_1^{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{3}} \right).$$

Ví dụ 18. (Khối A.2008) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx.$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)} dx = -\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4}{t^2 - 1} dt, (t = \tan x) \\
 &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \right) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{10\sqrt{3}}{27}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 19. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + 3 \cos 2x}}.$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + 3(2 \cos^2 x - 1)}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x \sqrt{6 \cos^2 x - 2}} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x \sqrt{6 - \frac{2}{\cos^2 x}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos^3 x \sqrt{4 - 2 \tan^2 x}}.
 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{4 - 2 \tan^2 x} \Rightarrow t^2 = -2 \tan^2 x \Rightarrow 2t dt = \frac{-4 \tan x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} t dt.$

$x = 0 \Rightarrow t = 2; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}. I = -\frac{1}{2} \int_2^{\sqrt{2}} dt = -\frac{1}{2} t \Big|_2^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} (\sqrt{2} - 2) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Ví dụ 20. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{12}} \frac{\cos x - \sin x}{2 \cos^2(x - \frac{\pi}{4})} dx. I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{12}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x)^2} dx.$

Đặt $t = \cos x + \sin x \Rightarrow dt = (-\sin x + \cos x)dx; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 21. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^2 x dx}{(\sin x - \cos x) \sin x}$. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^2 x dx}{(1 - \cot x) \sin^2 x}$. Đặt $t = 1 - \cot x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sin^2 x} dx$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$I = \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{(1-t)^2 dt}{t} = \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \left(\frac{1}{t} - 2 + t \right) dt = \left(\ln|t| - 2t + \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \ln \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 22. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} dx$. Đặt $t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow dt = dx; x = 0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos^3 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t}{\cos^3 t} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{-d(\cos t)}{\cos^3 t} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{2 \cos^2 t} + \tan t \right] \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{3 + 4 \sin x - \cos 2x}$. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x dx}{3 + 4 \sin x - 1 + 2 \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{(1 + \sin x)^2}$.

Đặt $t = 1 + \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{(1 + \sin x)^2} = \int_1^2 \frac{(t-1) dt}{t^2} = \left(\ln t + \frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + \ln 2.$$

Ví dụ 24. (Khôi A.2011) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x \sin x + \cos x} + \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} \right) dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{(x \sin x + \cos x)'}{x \sin x + \cos x} \right) dx = \left[x + \ln|x \sin x + \cos x| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) \right).$

Ví dụ 25. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cot x}{\sin x \sin(x + \frac{\pi}{4})} dx$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cot x}{\sin x \sin(x + \frac{\pi}{4})} dx = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cot x}{\sin x (\sin x + \cos x)} dx = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cot x}{\sin^2 x (1 + \cot x)} dx$$

Đặt $t = 1 + \cot x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} dx = -dt$. $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 1 + \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2$.

$$I = -\sqrt{2} \int_{\sqrt{3+1}}^2 \frac{t-1}{t} dt = \sqrt{2} (t - \ln t) \Big|_2^{\sqrt{3+1}} = \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1 - \ln(\sqrt{3} + 1) - 2 + \ln 2) \\ = \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1 + \ln(\sqrt{3} - 1)).$$

Ví dụ 26.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{|\cos x| \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x dx}{\sqrt{2 + \tan^2 x}}$$

Đặt $t = \sqrt{\tan^2 x + 2} \Rightarrow t^2 = \tan^2 x + 2 \Rightarrow 2tdt = 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sqrt{3}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\sqrt{2 + \tan^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x \cos^2 x dx}{\cos^2 x \sqrt{2 + \tan^2 x}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{tdt}{(t^2 - 1)t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right).$$

Ví dụ 27. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3 \sin x - \sin 2x}{(2 \cos^2 x - 3 \cos x)(3 - 2 \sin^2 x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x(3 - 2 \cos x)}{\cos x(2 \cos x - 3)(1 + 2 \cos^2 x)} dx$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos x(1 + 2 \cos^2 x)} = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x \sin x dx}{\cos^2 x(1 + 2 \cos^2 x)}$$

Đặt $t = 2 \cos^2 x \Rightarrow dt = -4 \cos x \sin x dx$. $x = 0 \Rightarrow t = 2$, $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

$$I = \frac{1}{2} \int_2^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{2} \int_2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \Big|_2^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln 2.$$

Ví dụ 28. $I = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}-2}{2}} \frac{dx}{x^2 + 2x + \frac{7}{4}}$. Ta có $I = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}-2}{2}} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 + \frac{3}{4}} = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}-2}{2}} \frac{dx}{(x+1)^2 + \frac{3}{4}}$.

Đặt $x + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos^2 t} dt; x = -1 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t \left(\frac{3}{4} \tan^2 t + \frac{3}{4} \right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Ví dụ 29. $\int_1^e \frac{xe^x + 1}{x(e^x + \ln x)} dx = \int_1^e \frac{d(e^x + \ln x)}{e^x + \ln x} = \ln(e^x + \ln x) \Big|_1^e = \ln(e^e + 1) - 1$.

Ví dụ 30. $\int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{4}{x(x^4 + 1)} dx = \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{4x^3}{x^4(x^4 + 1)} dx = \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{d(x^4)}{x^4(x^4 + 1)} = \int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)} = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \Big|_1^3 = \ln \frac{3}{2}$.

Ví dụ 31. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$. Đặt $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt; x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}; x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2 \cos^2 \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}} \sin t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left| \cot \frac{t}{2} \right| 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = (t + \sin t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 32. $\int_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{\tan 4x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{\sin 4x}{\cos 4x(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{\sin 4x}{\cos 4x(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{\sin 4x dx}{\cos 4x \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \right)} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{\sin 4x dx}{\cos 4x (3 + \cos 4x)} = \int_{3+\frac{\sqrt{2}}{2}}^4 \frac{dt}{(t-3)t} \quad (t = 3 + 4 \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{3+\frac{\sqrt{2}}{2}}^4 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-3}{t} \right| \Big|_{3+\frac{\sqrt{2}}{2}}^4 = \frac{1}{3} \ln \frac{3\sqrt{2} + 1}{4}.$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\cos x + 1}$. ĐS: $2(1 - \ln 2)$.

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx$. ĐS: $\ln \frac{4}{3}$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \ln(1 + \cos x) dx$. ĐS: $2 \ln 2 - 1$.

4) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$. ĐS: $\frac{1}{2}(e - 1)$.

- 5) $\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$. ĐS: $e^3 - e$.
- 6) $\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2 + 3} dx$. ĐS: $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 8)$.
- 7) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$. ĐS: $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
- 8) $\int_1^e \frac{2 + \ln x}{x} dx$. ĐS: $\frac{5}{2}$.
- 9) $\int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} \ln x dx$. ĐS: $\frac{e^2}{4} + \frac{3}{4}$.
- 10) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{7 + x^2}} dx$. ĐS: $3 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{49}$.
- 11) $\int_4^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4}}$. ĐS: $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
- 12) $\int_0^1 x\sqrt[3]{1 - x} dx$. ĐS: $\frac{9}{28}$.
- 13) $\int_0^1 x^3\sqrt{1 + x^2} dx$. ĐS: $\frac{2\sqrt{2} + 2}{15}$.
- 14) $\int_1^2 \frac{xdx}{1 + \sqrt{x - 1}}$. ĐS: $\frac{11}{3} - 4 \ln 2$.
- 15) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{2x + 4\sqrt{2x + 1} + 5}$. ĐS: $\ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$.
- 16) $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x + 1}}{1 + \sqrt{2x + 1}} dx$. ĐS: $2 + \ln 2$.
- 17) $\int_{-1}^4 \frac{2dx}{\sqrt{x + 5} + 4}$. ĐS: $4 + 16 \ln \frac{6}{7}$.
- 18) $\int_{-1}^1 \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$. ĐS: $2(\sqrt{3} - 1)$.
- 19) $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{6 + 2 \ln x}}{x} dx$. ĐS: $\frac{3}{4}(8 - 3\sqrt[3]{6})$.
- 20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt[3]{\sin x} dx$. ĐS: $\frac{3}{4}$.
- 21) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx$. ĐS: 2 .
- 22) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$. ĐS: $e - 1$.
- 23) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} dx$. ĐS: $e - 1$.
- 24) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{\cos^2 3x(1 + \tan 3x)} dx$. ĐS: $\frac{1}{3} \ln 2$.
- 25) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x + 1)}{(2 \tan x + 1)^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$. ĐS: $\frac{5}{18}$.
- 26) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4}) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$. ĐS: $1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$.
- 27) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{12}} \frac{\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})}{2 + \sin 2x - 2(\cos x + \sin x)} dx$. ĐS: $3 + 2\sqrt{2} 28$.
- 28) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$. ĐS: $\frac{4}{3}$.
- 29) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^3}$. HD: Đặt $x = \tan t$. ĐS: $\frac{\pi}{32}$.
- 30) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(2 - x^2)^3}}$. HD: Đặt $x = \sqrt{2} \sin t$. ĐS: 1 .
- 31) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$. ĐS: $4 - \pi$
- 32) $\int_2^5 \left(\frac{2x^2 - 2x - 1}{x - 1} \right) \ln(x - 1) dx$. ĐS: $48 \ln 2 - \frac{27}{2} - 2 \ln^2 2$.

- 33) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}}$. HD: Đặt $t = \sqrt{2 + \tan^2 x}$. ĐS: $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{21}}{3}$.
- 34) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3}$. HD: Đặt $t = 1 + \sqrt{3} \cot x$. ĐS: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.
- 35) $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x \sqrt{1 + \ln x}} + 3x^2 \ln x \right) dx$. ĐS: $\frac{5 - 2\sqrt{2} + 2e^3}{3}$.
- 36) $\int_0^{3 \ln 2} \frac{e^{2x} dx}{1 + \sqrt{3e^x + 1}}$. HD: Đặt $t = \sqrt{3e^x + 1}$. ĐS: $\frac{19}{3}$.
- 37) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4}) dx}{4 - 3 \sin 2x}$. ĐS: $\frac{\pi \sqrt{6}}{18}$.
- 38) $\int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x + 2}}$. ĐS: $\frac{12}{5}$.
- 39) $\int_0^3 \frac{x^2}{2(x+1) + (2+x)\sqrt{x+1}} dx$. ĐS: $\frac{2}{3}$.
- 40) $\int_1^{e^2} \frac{(x+1) \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$. ĐS: $\frac{4(e^3 + 5)}{9}$.
- 41) KA.2009 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$. ĐS: $\frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$.
- 42) $\int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$. ĐS: $-2 + \ln(e^2 + e + 1)$.
- 43) $\int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$. ĐS: $\frac{3}{4}(1 + \ln 3) - \ln 2$.
- 44) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x + \sin x) \cos 2x}{(1 + \cos x + \sin x)^3} dx$. HD: Đặt $t = 1 + \cos x + \sin x$. ĐS: $-\frac{5}{8} + \ln 2$.
- 45) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + \sin^2 2x) \cos 2x dx$. ĐS: $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}$.
- 46) $\int_0^1 x \ln(x^2 + x + 1) dx$. ĐS: $\frac{3}{4} \ln 3 - \frac{\pi \sqrt{3}}{12}$.
- 47) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x \cdot \ln(\cos x)}{\cos x} dx$. ĐS: $-\sqrt{2} \ln \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1$.
- 48) $\int_0^{-\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\cos^3(x + \frac{\pi}{3})}$.
- 49) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$. Đặt $x = \cos 2t$.
- 50) $\int_{\sqrt[3]{3}}^{\sqrt[3]{8}} \frac{\sqrt{1+x^6}}{x} dx$. Đặt $t = \sqrt{1+x^6}$.
- 51) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan^3 x}$.
- 52) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan^4 x}$.
- 53) KA.2006 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$.

CÁC BÀI TẬP ÔN TẬP

Tính các tích phân

2) $\int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx$. ĐS: $\frac{e^2 - 2}{2}$.

3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx$. ĐS: $-\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2}$.

4) $\int_0^1 (e^{-2x} + x)e^x dx$.

5) $\int_0^{-1} x^3 e^{x^4} dx$. ĐS: $\frac{1}{4}(e - 1)$.

6) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$. ĐS: $\sqrt{2} - 1$.

7) $\int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$. ĐS: $\frac{3}{4e^2} - \frac{4}{7}$.

8) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x} dx$. ĐS: $-\frac{468}{7}$.

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \sin x \cos^5 x dx$. ĐS: $\frac{12}{91}$.

10) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5 + 2x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$. ĐS: $\frac{26}{5}$.

11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 + \cos 2x}$. ĐS: $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2})$.

12) $\int_{-1}^2 \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 dx$. ĐS: $\frac{39}{4} - 6 \ln 4$.

13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - 2 \sin^2 x) dx}{1 + \sin 2x}$. ĐS: $\frac{1}{2} \ln 2$.

14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 + \sin x)^2 dx$. ĐS: $\frac{7}{3}$.

15) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$. ĐS: $\ln \frac{2e}{e+1}$.

16) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx$. ĐS: $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$.

17) $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}$. ĐS: $\frac{20}{3}$.

19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$. ĐS: $\frac{1}{6}$.

20) $\int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{x^5 + 1}} dx$. ĐS: $\frac{2}{5}(\sqrt{33} - 1)$.

21) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$. ĐS: $\ln \sqrt{2}$.

22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin^2 x dx$. ĐS: $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$.

23) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$. ĐS: $2 - \frac{\pi}{2}$.

24) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$. Đặt $t = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. ĐS: $-\frac{1}{3}(\frac{5\sqrt{5}}{8} - 2\sqrt{2})$.

25) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$. ĐS: $\frac{4}{3}$.

26) $\int_0^{\pi} \cos^3 x \cos 3x dx$. ĐS: $\frac{\pi}{8}$.

27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{1 + \sin 2x}$. ĐS: $\frac{\pi}{4}$.

28) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2} dx$. ĐS: $\frac{5}{3} \ln 2 - \ln 3$.

29) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{x e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$. ĐS: $20 \ln 2 - 6 \ln 3 - 4$.

30) $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$. ĐS: $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

31) $\int_{\ln 4}^{\ln 12} \sqrt{e^x - 3} dx$. ĐS: $4 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. 32) $\int_0^1 \frac{x(x-1)dx}{x^2-4}$. ĐS: $1 + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$.

33) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{1+4 \tan^2 x}}$. ĐS: $\frac{1}{27} \left(2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \right)$. 34) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6}) dx}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^3}$. ĐS: $-\frac{1}{48}$.

35) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$. ĐS: $2 \ln 2 - 1$. 36) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{12}} \frac{(\cos x - \sin x) \left[1 + \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right]}{1 + \cos(2x - \frac{\pi}{2})} dx$. ĐS: $\frac{-\sqrt{2}}{2} - \ln 2$.

37) $\int_0^1 x^3 \ln(x^2 + 3) dx$. ĐS: $-4 \ln 2 + \frac{9}{4} \ln 3 + \frac{5}{8}$. 38) $\int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}} dx$. ĐS: $\frac{2}{3} e^2$.

39) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$. ĐS: $e - 1 + \frac{\pi}{4}$.

IV. Tính diện tích và thể tích
Tính diện tích hình phẳng

1. Diện tích S của hình phẳng D giới hạn bởi: $\begin{cases} (C) : y = f(x) \\ Ox : y = 0 \\ x = a; x = b; (a < b) \end{cases}$

tính theo công thức: $S = \int_a^b |f(x)| dx$ (1)

2. Diện tích S của hình phẳng D giới hạn bởi: $\begin{cases} (C_1) : y = f(x) \\ (C_2) : y = g(x) \\ x = a; x = b; (a < b) \end{cases}$

tính theo công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ (2)

3. Diện tích S của hình phẳng D giới hạn bởi: $\begin{cases} (C) : x = \varphi(y) \\ Oy : x = 0 \\ y = c; y = d; (c < d) \end{cases}$

tính theo công thức: $S = \int_c^d |\varphi(y)| dy$ (3)

4. Diện tích S của hình phẳng D giới hạn bởi:

$\begin{cases} (C_1) : x = \varphi_1(y) \\ (C_2) : x = \varphi_2(y) \\ y = c; y = d; (c < d) \end{cases}$ tính theo công thức: $S = \int_c^d |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy$ (4)

Chú ý. Cách đưa dấu giá trị tuyệt đối ra ngoài dấu tích phân

Ta cần tính $I = \int_a^b |f(x)| dx$

Trước hết ta giải phương trình $f(x) = 0$, chọn nghiệm $x_0 \in (a; b)$, khi đó

$$I = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^{x_0} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_0}^b f(x) dx \right|.$$

Tính thể tích khối tròn xoay

1. Thể tích của vật thể tròn xoay được tạo nên do hình phẳng D giới hạn bởi

$$\begin{cases} (C) : y = f(x) \\ Ox : y = 0 \\ \Delta_1 : x = a \\ \Delta_2 : x = b \quad (a < b) \end{cases} \quad \text{quay xung quanh trục } Ox \text{ tính theo công thức: } V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (1)$$

2. Thể tích của vật thể tròn xoay được tạo nên do hình phẳng D giới hạn bởi

$$\begin{cases} (C_1) : y = f(x) \\ (C_2) : y = g(x) \\ \Delta_1 : x = a \\ \Delta_2 : x = b; (a < b) \end{cases}$$

được tính theo công thức: $V_{Ox} = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx \quad (2)$

3. Thể tích của vật thể tròn xoay được tạo nên do hình phẳng D giới hạn bởi

$$\begin{cases} (C) : x = \varphi(y) \\ Oy : x = 0 \\ \Delta_1 : y = c \\ \Delta_2 : y = d \quad (c < d) \end{cases} \quad \text{được tính theo công thức: } V_{Oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \quad (3)$$

4. Thể tích của vật thể tròn xoay được tạo nên do hình phẳng D giới hạn bởi

$$\begin{cases} (C_1) : x = \varphi_1(y) \\ (C_2) : x = \varphi_2(y) \\ \Delta_1 : y = c \\ \Delta_2 : y = d \quad (c < d) \end{cases} \quad \text{được tính theo công thức: } V_{Oy} = \pi \int_c^d |\varphi_1^2(y) - \varphi_2^2(y)| dy \quad (4)$$

1) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y = \frac{\ln x}{x^2}; y = 0; x = \frac{1}{2}; x = e$ Đs: $(\ln 4 - \frac{2}{e})$ (đvdt).

b) $y + x^2 - 5 = 0; x + y - 3 = 0$ Đs: $\frac{9}{2}$ (đvdt).

c) $y = x^2 - 2x + 2; y = -x^2 - x + 3$ Đs: $\frac{9}{8}$ (đvdt).

d) $y = 2x^3 - x^2 - 8x + 1; y = 6$ Đs: $\frac{2401}{96}$ (đvdt).

e) $y = x^3 - 3x$ (C) và tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x = -0,5$ Đs: $\frac{27}{64}$ (đvdt).

f) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ và các tiếp tuyến với đường cong xuất phát từ $M(\frac{5}{2}; -1)$. Đs: $\frac{9}{8}$ (đvdt).

g) $y = -x^2 + 6x - 8$; tiếp tuyến tại đỉnh parabol đã cho và trục tung Đs: 9 (đvdt).

h) $y = 4 \sin^2 x(1 + \cos^2 x); x = -\pi; x = \pi; y = 0$ Đs: 5π (đvdt).

i) $y = (2 + \cos x)\sin x; y = 0; x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}$ Đs: 3 (đvdt).

j) $y = \frac{x^2}{2}$ (P); $x^2 + y^2 = 8$ (C) (Phần nằm phía trong (P)) Đs: $(2\pi + \frac{8}{3})$ (đvdt).

k) $y = |x^2 - 4x + 3|; y = x + 3$. Đs: $\frac{109}{6}$ (đvdt).

l) $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}; y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$. Đs: $2\pi + \frac{4}{3}$ (đvdt).

m) $y = \ln x; x = 0; y = -1; y = 1$. Đs: $e - \frac{1}{e}$ (đvdt).

n) $y = \frac{1}{x}; y = 1; y = 2; x = 0$. Đs: $\ln 2$ (đvdt).

o) $y = e^x; y = 2; x = 1$. Đs: $e - 4 + 2 \ln 2$ (đvdt).

p) $y^2 = 2x + 1; y = -x + 1$. Đs: $\frac{16}{3}$ (đvdt).

q) $y = (e + 1)x; y = (e^x + 1)x$. Đs: $\frac{e}{2} - 1$ (đvdt).

r) $y = x^2; y = \sqrt{2 - x^2}$ Đs: $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ (đvdt).

s) $y = \frac{x(1-x)}{x^2+1}; y = 0$. Đs: $\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \ln 2$ (đvdt).

t) $y = \frac{x \ln^2(x^2+1)}{x^2+1}; y = 0; x = 0; x = \sqrt{e-1}$. Đs: $\frac{1}{6}$ (đvdt).

u) $y = \sqrt{e^x+1}; y = 0; x = \ln 3; x = \ln 8$. Đs: $2 + \ln \frac{3}{2}$ (đvdt).

v) $y = 2^x; y = 3 - x; y = 0; x = 0$. Đs: $\left(\frac{1}{\ln 2} + 2\right)$ (đvdt).

w) $y = 2^x; y = 3 - x; x = 0; x = 3$. Đs: $\left(\frac{5}{\ln 2} + \frac{1}{2}\right)$ (đvdt).

2) Tính thể tích các vật thể tròn xoay tạo nên do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau đây quay quanh Ox

a) $y = x^3 + 1; y = 0; x = 0; x = 1$. Đs: $\frac{23\pi}{14}$.

b) $y = -x^2 + x + 2; y = 0$. Đs: $\frac{81\pi}{10}$.

c) $y = \frac{4}{x}; y = 0; x = 1; x = 4$. Đs: 12π .

d) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2; y = 0$. Đs: $\frac{81\pi}{35}$.

e) $y = \frac{1}{x}; y = 1; y = 2; x = 0$. Đs: 2π .

f) $x = 0$. Đs: $\pi(\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{3}{2})$.

g) $y = x \ln x; y = 0; x = e$. Đs: $\pi \cdot \frac{(5e^3 - 2)}{27}$.

h) $4y = x^2; y = x$. Đs: $\frac{128\pi}{15}$.

3) Tính thể tích các vật thể tròn xoay tạo nên do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh Oy

a) $y = 2x - x^2; y = 0$. Đs: $\frac{8}{3}\pi$.

c) $y = \frac{1}{x}; y = 1; y = 2; x = 0$. Đs: $\frac{\pi}{2}$.

b) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1$. Đs: $8\pi^2$

d) $y = 2x + x^2; y = 0$. Đs: $\frac{8}{3}\pi$.

4) Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường sau:

$$y = e^x + 1; y = 0; x = 0; x = 1.$$

a) Tính diện tích của hình phẳng D . Đs: e (đvdt).

b) Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo nên do hình phẳng D quay quanh Ox .

Đs: $\pi(\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2})$ (đvtt).

c) Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo nên do hình phẳng D quay quanh Oy .
Đs: 3π (đvtt).

Đại học An Giang, ngày 23 tháng 4 năm 2013.